Cours du 01.03.2021 APRES-MIDI

lundi, 1 mars 2021 13:01

RAPPEL : le support du cours se trouve sur le site suivant :
https://eswys.ch/hepia/

Références externes : faire vos propres recherches !

Question : à quoi ça sert de prouver que $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$

C'est trivial ?! L'addition est commutative dans R, donc elle doit l'être dans R^2.

TOUT dépende de la DEFINITION de l'addition !!!!

Il s'agit d'une surcharge d'opérateur (c.f. programmation) => le contexte des paramètres définit l'opération à faire :

Operator "/" : float / float => float

$2.2 \,/\, 2.0 = 1{,}1$

Operator "/" : int / float => float

$3 \,/\, 1{,}5 = 2{,}0$

Operator "/" : int / int => int

$3 \,/\, 2 = \underline{1}$

⚠ $3/2 = 1$

$3.0/2 = 1{,}5$

$3/2.0 = 1{,}5$

$3.0/2.0 = 1{,}5$

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$$

$$+(a, b) \longmapsto a+b$$

$$+ : \mathbb{R}^{2\,N} \times \mathbb{R}^{2\,N} \longmapsto \mathbb{R}^{2\,N}$$

$$+(\vec{x}, \vec{y}) \to \vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_N + y_N \end{pmatrix}$$

COMMUTATIF ! ✓

$$\text{"+"} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^4$$

$$\text{"+"}(\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \vec{x} \text{ "+" } \vec{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^4}$$

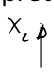
⚠ PAS COMMUTATIF !

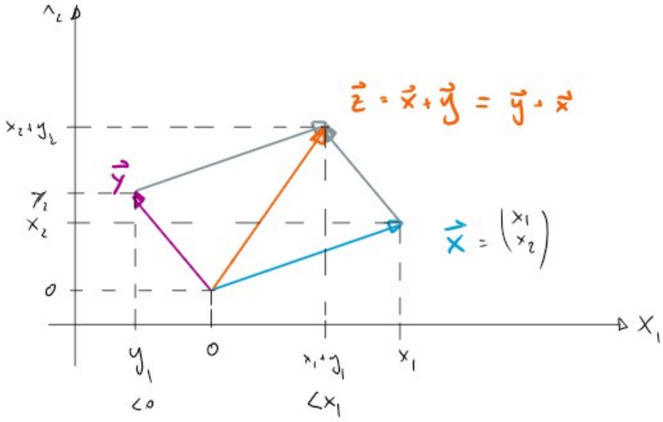
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{"+"} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{"+"} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

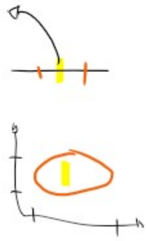
PAS EGAL

Interprétation GEOMETRIQUE de l'addition vectorielle :

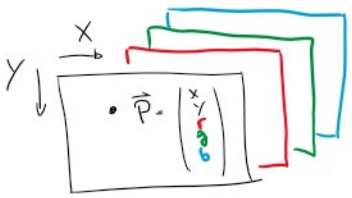




Quid de plus que 3 dimensions ?



Que regardez-vous ?? Un écran a combien de dimensions ?



$x_1 = x_2$
$y_1 = y_2$

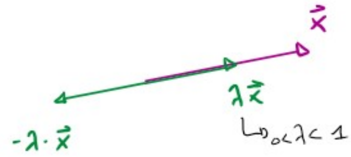
$$\oplus \quad \vec P_1 + \vec P_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ r_1 \\ g_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ r_2 \\ g_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ r_1 + r_2 \\ g_1 + g_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$$

$x, y \in \mathbb{N}$
$r, g, b \in \{0, \dots, 255\}$

Multiplication par un scalaire :
Un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ et un vecteur $\vec x \in \mathbb{R}^2$ la multiplication par un scalaire est donnée par

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2} \longmapsto \mathbb{R}^{2} \qquad N$$

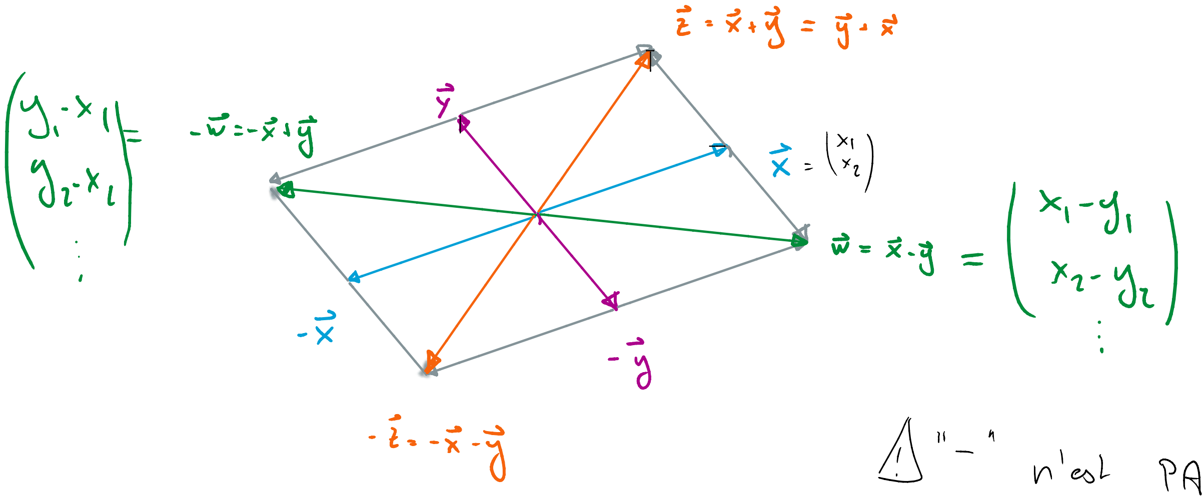
$$\cdot(\lambda, \vec x) \longmapsto \lambda \cdot \vec x = \lambda \vec x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_N \end{pmatrix}$$



Multiplier par un scalaire => change le sens et/ou la longueur, mais JAMAIS sa direction !

Qu'est-ce que la SOUSTRACTION de 2 vecteurs ???

Analogie : dans $\mathbb{R}^2$ $\quad \vec{a}-\vec{b} = \vec{a}+(-\vec{b}) = \vec{a} + \underbrace{(-1)}_{\text{SCALAIRE}}.\vec{b}$



⚠ "$-$" n'est PAS commutatif

$$(+\vec{x})(-\vec{y}) = -\vec{y} + \vec{x}$$

$$+\vec{x} - \vec{y} \neq -\vec{x} + \vec{y}$$

Définition : **Combinaison linéaire**

Soient deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$, et deux scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\quad (\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2)$

La combinaison linéaire de ces deux vecteurs est définie par

$$\vec{z} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 \end{pmatrix}$$

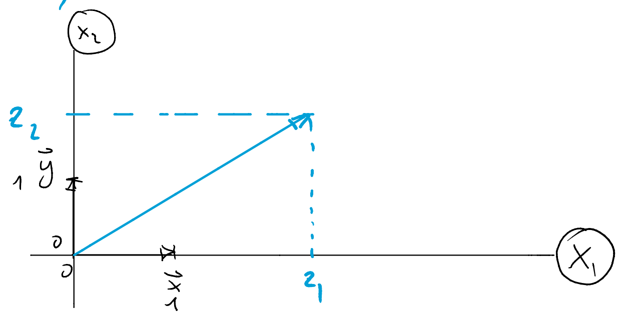
A N dimensions, on va écrire les vecteurs comme $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in \mathbb{R}^N$ $(n \neq N$ ou $n = N)$

Et les scalaires seront indexés similairement par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\vec{z} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i}$$

Conséquence : la soustraction de 2 vecteurs n'est rien d'autre qu'une combinaison linéaire de 2 vecteurs avec $\lambda = 1$ et $\mu = -1$!

$$\vec{x} - \vec{y} = \underbrace{1}_{\lambda} \cdot \vec{x} + \underbrace{(-1)}_{\mu} \cdot \vec{y}$$



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}_{[\vec{x}, \vec{y}]}$$

$$\vec{z} = \lambda \vec{x} + \mu \vec{y} = z_1 \vec{x} + z_2 \vec{y}$$

$$= z_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, TOUS les vecteurs du plan peuvent être s'écrire comme COMBINAISON LINEAIRE des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$!

Définition :

On dit que deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont

- Linéairement dépendants,
- Colinéaires,
- Liés

} même chose

S'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\vec{x} = \lambda \cdot \vec{y} \qquad \text{ou} \qquad \vec{x} + \lambda \vec{y} = \vec{0}$$

Si x et y ne sont PAS colinéaires, on dit alors qu'il sont

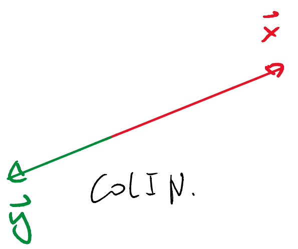
- Linéairement Indépendants (vs linéairement dép.) ...

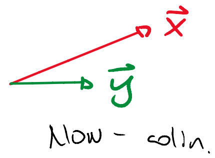
Si x et y ne sont PAS colinéaires, on dit alors qu'il sont

- Linéairement Indépendants (vs linéairement dép.)
- NON-colinéaires (vs colinéaires)
- Libres (vs liés)

équivalents

Par définition, si deux vecteurs sont COLINEAIRES, alors ils ont FORCEMENT la même DIRECTIONS (pas nécessairement les même sens ou la même longueur). Ils sont donc PARALLELES !!!!!





Deux vecteurs permettent de générer TOUS les vecteurs du plan SI ET SEULEMENT SI ils sont NON-colinéaires !!!!!!